

中学校数学

第2学年

5 図形の性質と証明

[問題]

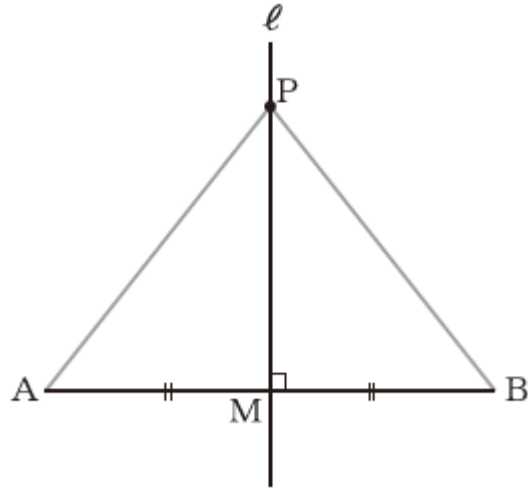
中学校

年 組 号 氏名

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

■全国学力・学習状況調査①

下の図のように、線分ABの垂直二等分線 l をひいて、線分ABとの交点をMとします。また、直線 l 上に点Pをとります。【H19】



このとき、 $PA=PB$ となることを、下のように証明しましたが、この証明にはまちがいがあります。

証明

$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ において、
仮定から、

$$AM = BM \quad \dots\dots ①$$

$$PA = PB \quad \dots\dots ②$$

また、 $PM = PM$ (PMは共通) $\dots\dots ③$

①, ②, ③より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$$

したがって、 $PA = PB$

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年組 号氏名

■全国学力・学習状況調査②

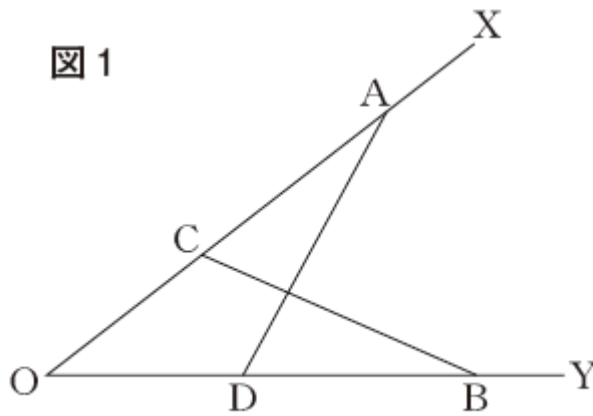
拓也さんは、次の問題を考えています。【H20】

問題

下の図1のように、 $\angle XOY$ の辺 OX と辺 OY 上に、 $OA = OB$ となるように点 A と点 B を、 $OC = OD$ となるように点 C と点 D を、それぞれとります。

点 A と点 D 、点 B と点 C をそれぞれ結ぶとき、 $AD = BC$ となることを証明しなさい。

図1

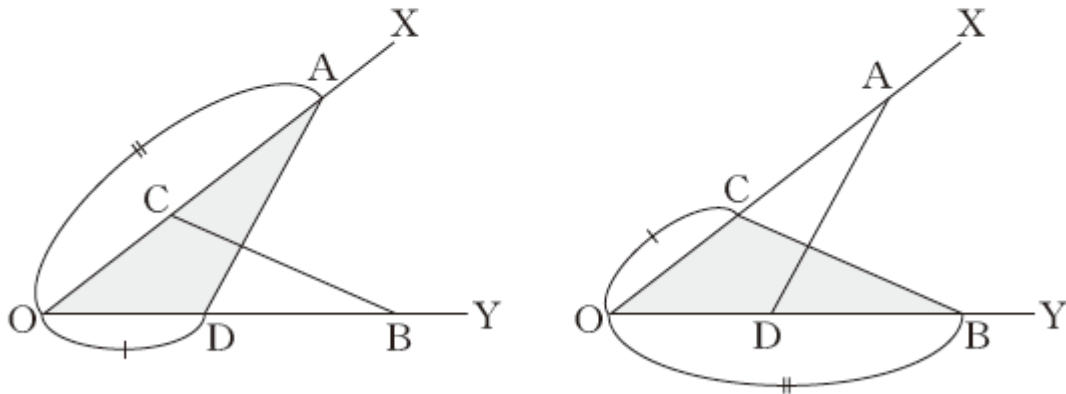


拓也さんは、証明の方針を下のようなメモにまとめました。

拓也さんのメモ

① $AD = BC$ を証明するためには、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同を示せばよい。

② 図1の $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ を見やすくするために、2つの図に分けて、仮定を表すと、下のようになる。



③ ②をもとにすると、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同が示せそうだ。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 拓也さんのメモの ① にあるように、 $AD=BC$ を証明するために、 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ の合同を示せばよいのは、合同な図形のどのような性質からですか。下のアからエの中から1つ選びなさい。

ア 合同な図形の対応する辺の長さは等しい。

イ 合同な図形の対応する角の大きさは等しい。

ウ 合同な図形の周の長さは等しい。

エ 合同な図形の面積は等しい。

(2) 前ページの問題で、 $AD=BC$ となることを証明しなさい。

(3) 拓也さんは、 $AD=BC$ を、 $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$ をもとにして証明しました。

$\triangle AOD \equiv \triangle BOC$ をもとにすると、前ページの問題の図形について、 $AD=BC$ 以外に新しいことが分かります。それを下のアからエの中から1つ選びなさい。

ア $OC=OD$

イ $OC=BD$

ウ $\angle OAD = \angle OBC$

エ $\angle OAD = \angle BOC$

数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

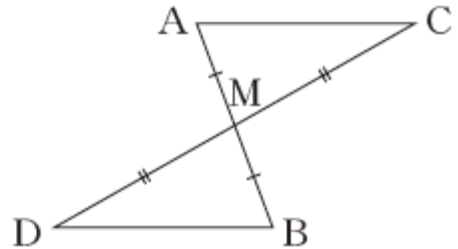
全国学力・学習状況調査③

大貴さんは、次の問題を考えています。【H21】

問題

右の図のように、線分ABと線分CDがそれぞれの中点Mで交わっています。

このとき、 $AC \parallel DB$ となることを証明しなさい。



次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

- (1) 大貴さんは、次のような**証明の方針1**を考えました。この**証明の方針1**にもとづいて、 $AC \parallel DB$ となることの証明を完成しなさい。

証明の方針1

- ① $AC \parallel DB$ を証明するためには、 $\angle MAC = \angle MBD$ (錯角が等しい)を示せばよい。
- ② $\angle MAC = \angle MBD$ を示すためには、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ を示せばよい。
- ③ 仮定の $AM = BM$, $CM = DM$ を使うと、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ が示せそうだ。

証明

$\triangle AMC$ と $\triangle BMD$ において,



合同な三角形の対応する角は等しいから,

$$\angle MAC = \angle MBD$$

したがって, 錯角が等しいから,

$$AC \parallel DB$$

(2) 大貴さんは, $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ をもとにして $AC \parallel DB$ を証明しました。

$\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ をもとにすると, 前ページの問題の図形について, $\angle MAC = \angle MBD$ や問題の仮定以外にも分かることがあります。それを下の **ア** から **エ** の中から 1 つ選びなさい。

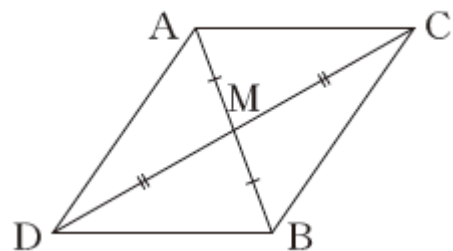
ア $\angle MCA = \angle MDB$

イ $\angle MAC = \angle MDB$

ウ $AM = BM$

エ $AM = DM$

(3) 右の図のように, 線分 AD , 線分 CB をひいて四角形 $ADBC$ をつくと, 次の証明の方針 2 を考えることもできます。



証明の方針2

- ① $AC \parallel DB$ を証明するためには、四角形ADBCが
(①)であることを示せばよい。
- ② このことは、仮定の $AM = BM$, $CM = DM$ を使うと、
 ② ことから示せる。

証明の方針2の(①)に当てはまる言葉を書きなさい。また、 ② に当てはまること
がらを、下のアからオの中から1つ選びなさい。

- ア 対角線が垂直に交わる
- イ 対角線の長さが等しい
- ウ 対角線が平行である
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる
- オ 対角線が垂直に交わり、その長さが等しい

全国学力・学習状況調査

次の問題1は、下のように証明できます。

問題1

図1のように、 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC の辺 AB 、辺 AC 上に $AD = AE$ となる点 D 、点 E をそれぞれとります。
このとき、 $BE = CD$ となることを証明しなさい。

図1

問題1の証明

ABE と ACD において、
仮定から、
 $AB = AC$
 $AE = AD$
 共通な角だから、
 $\angle BAE = \angle CAD$
 , , より、
 2辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$
 合同な図形の対応する辺の長さは等しいから、
 $BE = CD$

次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。【H22】

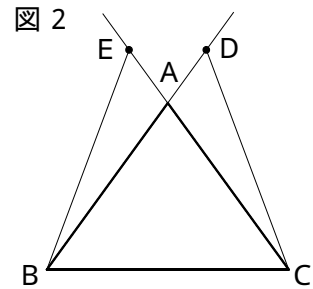
- (1) 問題1の証明では、「2辺とその間の角がそれぞれ等しい。」という三角形の合同条件が用いられています。この合同条件を用いるとき、 ABE と ACD の対応する2辺の間の角が等しいことを表しているのは、上の証明のどの部分ですか。その部分を書きなさい。

【解答】

(2) 問題1の一部を変えると、次の問題2をつくることができます。

問題2

図2のように、 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC の辺 BA 、辺 CA を延長した直線上に $AD = AE$ となる点 D 、点 E をそれぞれとります。
このとき、 $BE = CD$ となることを証明しなさい。

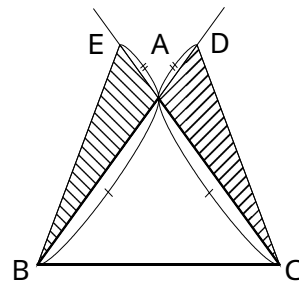


問題2でも ABE と ACD に着目すると、問題1と同じように、 $BE = CD$ となることを証明できます。

問題1の証明を参考にして、問題2の証明を完成しなさい。

問題2の証明

ABE と ACD において、



合同な図形の対応する辺の長さは等しいから、
 $BE = CD$

解答は、 の中にそのまま記入しなさい。

全国学力・学習状況調査

身の回りには、ものを安定して置くために水平な面をつくる工夫がいろいろ見られます。次の問いに答えなさい。【H22】

図1のような天板と台座を組み立てて使う机があります。図2はこの机を真横から見たものです。

図1

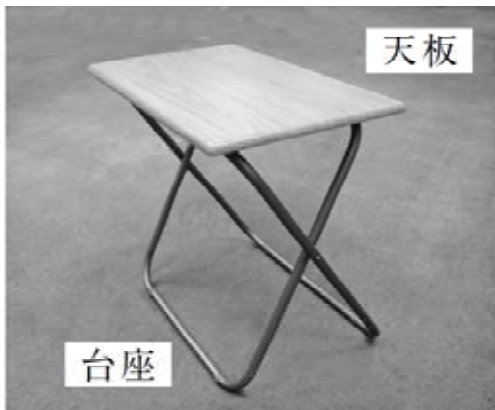


図2

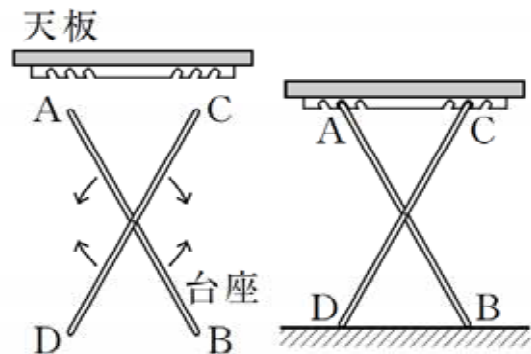


図2のように、この天板の裏側には、いくつかのくぼみがあり、台座のパイプは、ABとCDの長さが等しく、それぞれの真ん中で交わるように組み合わされています。これによって、台座を天板のどのくぼみに差し入れても、天板は床と平行になり、点Aの真下に点Dが、点Cの真下に点Bがあるような机になります。これは、4つの点A、D、B、Cを順に結んでできる四角形ADBCが、ある図形になるからです。その図形の名前を答えなさい。

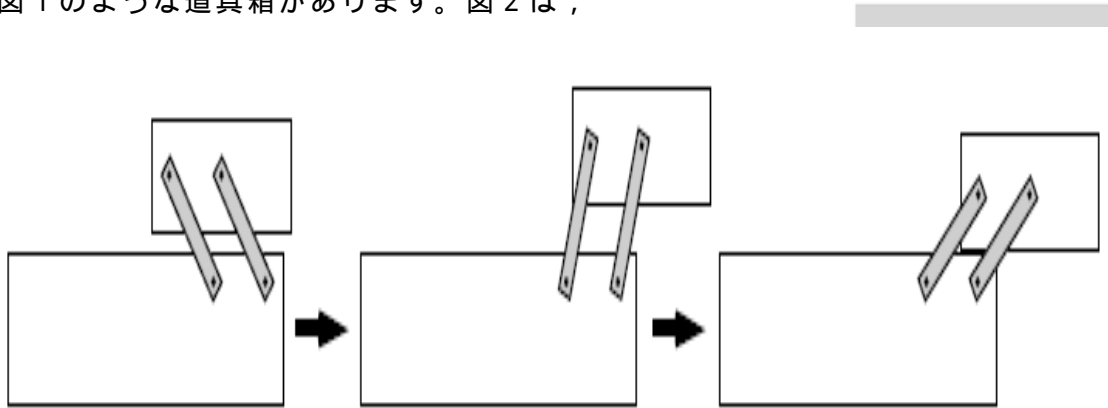
【解答】

全国学力・学習状況調査

身の回りには、ものを安定して置くために水平な面をつくる工夫がいろいろ見られます。次の問いに答えなさい。【H22】

図1のような道具箱があります。図2は、
上

図1



この道具箱は、次のように2本のアームを取り付けることで、上の段が下の段に対していつも平行に保たれるようになっています。

<p>1 同じアームを2本用意し、図3のように上の段に点E、下の段に点Fをとり、そこに1本のアームを取り付ける。</p>	<p>図3</p>
<p>2 図4のように、下の段に点Gをとり、そこにもう1本のアームを取り付ける。</p>	<p>図4</p>
<p>3 図5のように、点Eを中心としFGの長さと同じ半径の円をかく。そして点Gを中心としてアームを回転させ、円と重なった点Hにこのアームを取り付ける。</p>	<p>図5</p>

反対側のアームも同じように取り付けます。

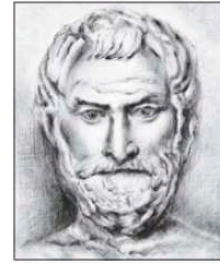
このようにアームを取り付けると上の段が下の段に対していつも平行に保たれるのは、四角形EFGHがいつでも平行四辺形になるからです。下線部を証明するための根拠となることから、平行四辺形になるための条件を用いて書きなさい。

【解答】

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

■全国学力・学習状況調査⑦ B問題

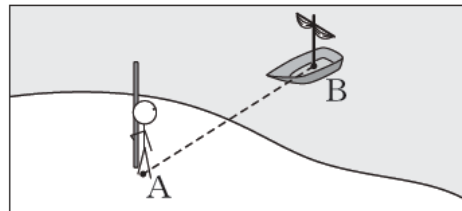
紀元前6世紀ごろの古代ギリシャで活躍した学者の1人に、タレスという人がいます。タレスは、次のようにして、陸上から直接測ることができない船までの距離を求めたといわれています。【H23】



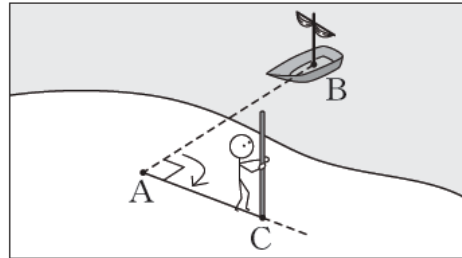
タレスの方法

◎陸上の点Aから沖に停泊している船Bまでの距離を求める場合

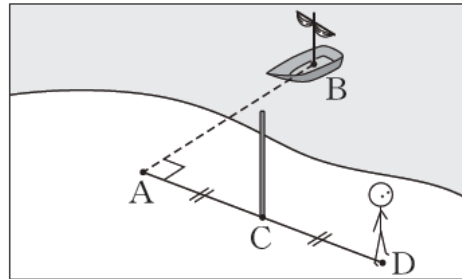
① 陸上の点Aから船Bを見る。



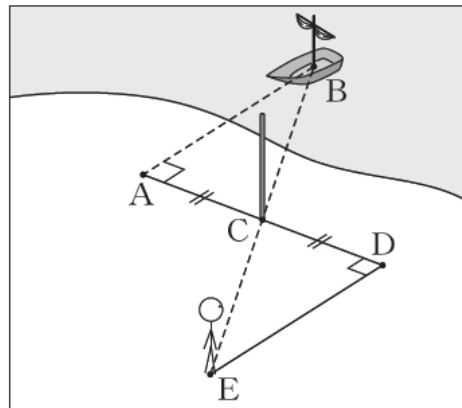
② 点Aで体の向きを90° 変え、距離を決めてまっすぐ歩いて棒を立て、その点をCとする。



③ さらに同じ方向に点Aから点Cまでの距離と同じだけまっすぐ歩いて立ち止まり、その点をDとする。



④ 点Dで点Cの方を向き、船Bとは反対側に体の向きを90° 変える。そこからまっすぐ歩き、点Cに立てた棒と船Bが重なって見える点をEとする。



⑤ 点Dから点Eまでの距離を測る。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

- (1) 点Aから船Bまでの距離を求めるために、**タレスの方法**では次のような考えが使われています。下の に当てはまる記号を書きなさい。

線分ABの長さを直接測ることができないので、 $\triangle ABC$ と合同な $\triangle DEC$ をつくり、線分ABの長さを線分 の長さに置きかえて求める。

【解答】

- (2) **タレスの方法**で点Aから船Bまでの距離を求めることができるのは、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEC$ が合同であるからです。下線部を証明するための根拠となることから、三角形の合同条件を用いて書きなさい。

【解答】

- (3) **タレスの方法**では、 $\angle BAC$ と $\angle EDC$ の大きさを 90° にしています。下のアからエは、この $\angle BAC$ と $\angle EDC$ の大きさについて述べたものです。正しいものを1つ選びなさい。

- ア $\angle BAC$ と $\angle EDC$ がどちらも 90° のときだけ、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEC$ を利用して船までの距離を求めることができる。
- イ $\angle BAC = \angle EDC$ であれば、 90° にしなくても、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEC$ を利用して船までの距離を求めることができる。
- ウ $\angle BAC$ を 90° にすれば、 $\angle EDC$ を何度にしても、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEC$ を利用して船までの距離を求めることができる。
- エ $\angle BAC$ と $\angle EDC$ の大きさを等しくしなくても、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEC$ を利用して船までの距離を求めることができる。

【解答】

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題 年 組 号 氏名

■全国学力・学習状況調査⑧ B問題

次の問題は、下のように証明できます。【H23】

問題

図1のように、 $\triangle ABC$ において $\angle ABC$ の二等分線と $\angle ACB$ の二等分線をひき、それらの交点をDとします。点Dを通り辺BCに平行な直線 l をひき、直線 l と辺ABとの交点をEとします。

このとき、 $EB = ED$ となることを証明しなさい。

図1

証明

$\triangle EBD$ において、
 仮定から、 $\angle DBC = \angle EBD$ ……①
 $ED \parallel BC$ で、平行線の錯角は等しいから、
 $\angle DBC = \angle EDB$ ……②
 ①、②より、 $\angle EBD = \angle EDB$
 2つの角が等しいから、 $\triangle EBD$ は二等辺三角形である。
 二等辺三角形は2辺が等しい三角形であるから、
 $EB = ED$

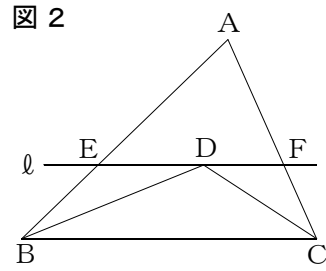
次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 上の証明の「仮定から、 $\angle DBC = \angle EBD$ ……①」における「仮定」を、下のアからエまでの中から1つ選びなさい。

- ア BD は $\angle ABC$ の二等分線である。
- イ CD は $\angle ACB$ の二等分線である。
- ウ 直線 l は点Dを通り辺BCに平行な直線である。
- エ $EB = ED$ である。

【解答】

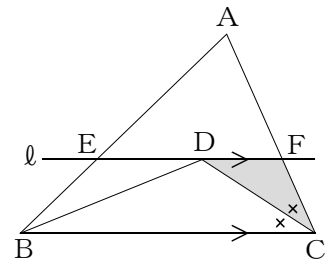
- (2) 図2のように、図1の直線 l と辺 AC との交点を F とします。このとき、 $FC = FD$ となることを、 $\triangle FCD$ が二等辺三角形であることから証明できます。



前ページの証明を参考にして、
 $FC = FD$ となることの証明を完成しなさい。
 (下の の中にそのまま書き込みなさい。)

証明

$\triangle FCD$ において、



二等辺三角形は2辺が等しい三角形であるから、
 $FC = FD$

- (3) $\triangle EBD$ と $\triangle FCD$ が二等辺三角形であることから、 $EB = ED$ 、 $FC = FD$ であることを証明できます。
 $EB = ED$ 、 $FC = FD$ であることをもとにすると、図2において、 $\triangle AEF$ の周の長さと等しいものがあることが分かります。それを下のアからオまでの中から1つ選びなさい。

- ア $AE + AF$
- イ $AE + AC$
- ウ $AB + AF$
- エ $AB + AC$
- オ $DB + DC$

【解答】

中学校数学

第2学年

5 図形の性質と証明

[解答例]

中学校

年 組 号 氏名

数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年組 号氏名

全国学力・学習状況調査①

- (1) ②の $PA=PB$ は条件ではないので、証明の中で使うことはできない。

$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ において、

仮定から、

$$AM=BM \quad \dots\dots ①$$

$$\underline{PA=PB} \quad \dots\dots ②$$

また、 $PM=PM$ (PM は共通) $\dots\dots ③$

①, ②, ③より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle PAM = \triangle PBM$$

したがって、 $PA=PB$

- (2) 正しい証明は次のとおり。

$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ において、

仮定から、

$$AM=BM \quad \dots\dots ①$$

線分 AB の垂直二等分線が l だから、

$$\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ \quad \dots\dots ②$$

また、 $PM=PM$ (PM は共通) $\dots\dots ③$

①, ②, ③より、

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$$

したがって、 $PA=PB$

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年組 号 氏名

■全国学力・学習状況調査②

(1) AD, BCは三角形の1辺の長さであるから, アが導き出される。

答え ア

(2) $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ で,

仮定から $AO=BO$ ……①

$OD=OC$ ……②

共通な角だから,

$\angle AOD=\angle BOC$ ……③

①, ②, ③より,

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle AOD\equiv\triangle BOC$

合同な図形において, 対応する辺の長さは等しいから,

$AD=BC$

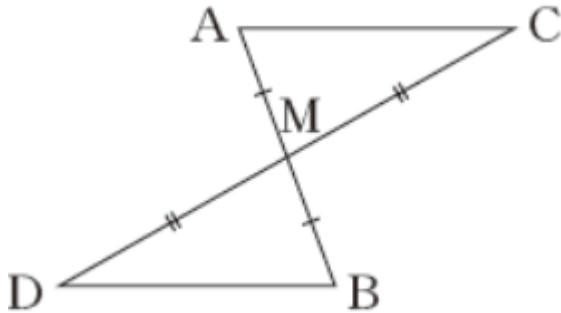
(3) 辺についてはすべて分かっている。対応する角の大きさが等しいことを式に表しているのはウである。

答え ウ

■ 数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年組 号氏名

■ 全国学力・学習状況調査③

(1)



【証明】

$\triangle AMC$ と $\triangle BMD$ において、

$$\text{仮定より} \quad AM=BM \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$CM=DM \quad \cdots\cdots\text{②}$$

対頂角は等しいので、

$$\angle AMC = \angle BMD \quad \cdots\cdots\text{③}$$

①, ②, ③より、

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle AMC \equiv \triangle BMD$$

合同な三角形の対応する角の大きさは等しいから、

$$\angle MAC = \angle MBD$$

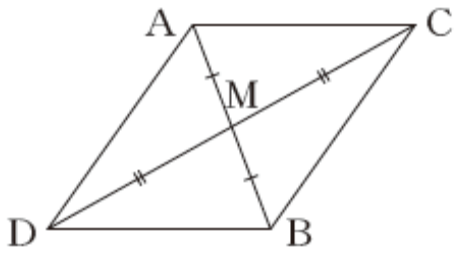
したがって、錯角が等しいから、

$$AC \parallel DB$$

(2) (1)の仮定や結論以外で分かることは、選択肢の中からは、 $\angle MCA = \angle MDB$ だけである。

答え ア

(3)



四角形ADBCが平行四辺形ならば $AC \parallel DB$ がいえる。
 $AM = BM$, $CM = DM$ が分かっているので、四角形ADBC
 において、対角線がそれぞれの中点で交わっている。
 よって、四角形ADBCは平行四辺形である。

答え ①……平行四辺形
 ②……**工**

全国学力・学習状況調査

(1) $\angle BAE = \angle CAD$

【ポイント】

証明の中で、角が等しいことを表しているのは、
の $\angle BAE = \angle CAD$ だけしかないよ。

(2) 解答例

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において、

仮定から、
 $AB = AC$
 $AE = AD$
 対頂角は等しいので、
 $\angle BAE = \angle CAD$
 , , より、
 2辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

【ポイント】

問題1の証明の仮定 , は、
 問題2の証明でも、そのまま仮定
 として使うことができるよ。
 問題の条件が変わったときに、
 もとの証明と何が変わり何がかわ
 らないのか確認する必要があるね。

合同な図形の対応する辺の長さは等しいから、
 $BE = CD$

全国学力・学習状況調査

長方形

【ポイント】

四角形 $ADBC$ は対角線 AB と CD の長さが等しく、それぞれの真ん中（中点）で交わるので、平行四辺形ではなく長方形になるよ。

全国学力・学習状況調査

解答例

2組の向かい合う辺がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である。

【ポイント】

2本のアームの取り付けの方法を示した文を見てみると、

¹ に同じアームを2本用意すると説明しているよ。

この説明より、

$$EF = HG$$

となることが分かるね。

³ に点Eを中心としてFGの長さと等しい半径の円をかくと説明しているよ。

この説明より、

$$FG = EH$$

となることが分かるね。

だから、四角形EFGHの2組の向かい合う辺がそれぞれ等しいことが言えるので、平行四辺形になるよ。

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■全国学力・学習状況調査⑦ B問題

(1) DE

【ポイント】

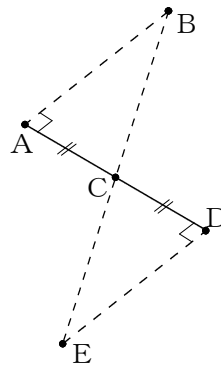
$\triangle ABC$ と $\triangle DEC$ は合同な図形なので、線分ABに対応する線分は線分DEになるよ。
したがって、答えはDEになるね。

(2) 例：1辺とその両端の角がそれぞれ等しい2つの三角形は、合同である。

【ポイント】

- ・タレスの方法の③から
 $AC = DC$
- ・タレスの方法の②, ④から
 $\angle BAC = \angle EDC = 90^\circ$
- ・対頂角の性質から
 $\angle ACB = \angle DCE$

以上のことから、
 $\triangle ACB$ と $\triangle DCE$ について、
三角形の合同条件の
「1辺とその両端の角がそれぞれ等しい」ことが
いえるので、 $\triangle ACB$ と $\triangle DCE$ は合同になるね。



(3) イ

【ポイント】

1辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同になるので、
 $\angle BAC$ と $\angle EDC$ の角の大きさが等しければ合同になるよ。
だから、 $\angle BAC$ と $\angle EDC$ が 90° でなくてもいいよ。
したがって、答えはイになるね。

■数学的な思考力・判断力・表現力を育む問題[解答] 年 組 号 氏名

■全国学力・学習状況調査⑧ B問題

(1) ア

【ポイント】

点Dは、 $\angle ABC$ の二等分線と $\angle ACB$ の二等分線の交点だから、 $\angle DBC = \angle EBD$ になるよ。
 線分BDが $\angle ABC$ の二等分線になっていることを示しているよ。
 したがって、答えはアになるね。

(2) 例：仮定から、 $\angle DCB = \angle FCD$ ……①
 $DF \parallel BC$ で、平行線の錯角は等しいから、

$$\angle DCB = \angle FDC \quad \dots\dots ②$$

①, ②より、 $\angle FCD = \angle FDC$ 2つの角が等しいから、 $\triangle FCD$ は二等辺三角形である。

【ポイント】

仮定から $\angle DCB = \angle FCD$
 $DF \parallel BC$ で、平行線の錯角は等しいから

$$\angle DCB = \angle FDC$$

 証明するときは、 の部分のように根拠を記述する必要があるね。

(3) エ

【ポイント】

 $\triangle AEF$ の周の長さは、

$$\begin{aligned} \triangle AEF \text{の周の長さ} &= AE + \underline{EF} + AF \\ &= AE + \underline{ED} + \underline{DF} + AF \end{aligned}$$

で求めることができるね。

 $\triangle EBF$ と $\triangle FCD$ が二等辺三角形であることから証明した $EB = ED$, $FC = FD$ より、

$$\begin{aligned} AE + ED + DF + AF &= \underline{AE + EB} + \underline{FC + AF} \\ &= \underline{AB} + \underline{AC} \end{aligned}$$

 $\triangle AEF$ の周の長さは、 $AB + AC$ の長さに等しくなるね。

したがって、答えはエになるね。